京都大学情報学研究科　知能情報学専攻
過去問解答解説

zuka

2020 年度

目 次

第1章　本資料を利用される方々へのお願い

この度は，資料を活用いただき誠にありがとうございます。最初に，本資料の内容を確認します。

1. 過去問解答解説の直近三年分（本資料）
   (a) 数学（離散数学を除く）
   (b) データ構造とアルゴリズム
   (c) 機械学習
   (d) 情報理論
   (e) 信号処理

次に，何点か注意事項をお伝えしておこうと思います。

- 解答の正しさは保証できません。
- 解説の正確性も保証できません。
- 内容の不備・誤植等はご報告いただけますと幸いです。
- 許可を得ない他人への譲渡・不正使用等はご遠慮ください。
- あくまで参考程度にしていただければと思います。

上でもお伝えしている通り，本資料は京都大学情報学研究科知能情報学専攻を目指される方のために，過去問を「数学（離散数学を除く）」「データ構造とアルゴリズム」「機械学習」「情報理論」「信号処理」の分野に絞って解説をお伝えしていくものです。「離散数学」「認知神経科学，知覚・認知心理学」の分野は含まれていませんので，ご了承ください。解答の正誤や解説の正確性は保証できません。また，本資料を無断で複製して他人に譲渡する行為はご遠慮ください。

第2章　数学（離散数学を除く）

2.1　線形代数

本年度は，昨年度同様基本的な内容が問われました。相変わらず，行列式や固有値・固有ベクトルの定義と計算が理解できているかどうかを問う出題がされています。特筆すべきは，昨年度から連続して，ある行列の固有値に関する性質を証明する問題が出題されている点です。昨年度は実対称行列の固有値が全て実数であり，それらに対応する固有ベクトルが直行することを証明する問題が出題されました。今年度は，実歪対称行列（交代行列）の固有値が 0 または純虚数であることの証明を問われました。昨年度の問題をしっかりと理解できていれば，同様の式変形を行うことで今年度の問題を解くことができます。

2.1.1　小問 (1-1)

余因子展開を利用していきましょう。注目する行 or 列は，できるだけ 0 がたくさん含まれるものを選ぶべきですが，今回の行列 D はどの行 or 列を選んでも 0 は 1 つしか含まれませんので，どこを選んでも OK です。今回は第 1 列について注目していきます。係数が 0 の部分は省略します。

$$\det|D| = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

同様に，3 次元正方行列についても余因子行列展開を利用してしまいましょう。もちろん，サラスの公式を利用しても OK です。なお，最後の 3 次元正方行列に関しては第 3 列目に注目します。

$$\det|D| = -\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) + 2\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) - 3\left(3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \tag{2.2}$$

$$= 4 + 8 + 84 \tag{2.3}$$

$$= 96 \tag{2.4}$$

2.1.2　小問 (1-2)

与えられた条件を因数分解してみましょう。

$$\mathbf{X}^3 - 5\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X} - 4\mathbf{E} = 0 \tag{2.5}$$

$$(\mathbf{X} - \mathbf{E})(\mathbf{X} - 2\mathbf{E})^2 = 0 \tag{2.6}$$

さて，与えられた $\mathbf{X}$ を見てみると，対角成分に既に 2 という値が入ってしまっています。ゆえに $\mathbf{X} \neq \mathbf{E}$ です。したがって，式 (2.6) より $\mathbf{X} = 2\mathbf{E}$ が得られます。すると，$a = 0$，$b = 2$ が得られます。

2.1.3　小問 (2-1)

転置をとると元の行列の実数要素が負になる行列が実歪対称行列（実交代行列）です。対角成分は転置をとっても変わりませんので 0 である必要があります。したがって，2 次元実歪対称行列 $\mathbf{Y}^{(2)}$ と 3 次元実歪対称行列 $\mathbf{Y}^{(3)}$ の一般系は以下のようになります。y_1，y_2，y_3，y_4 を任意の実数とします。

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ -y_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{Y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ -y_2 & 0 & y_4 \\ -y_3 & -y_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

2.1.4　小問 (2-2)

正則でないことを示すためには，行列式が 0 になることを示せば OK です。$n \times n$ の実歪対称行列を $\mathbf{A}$ とします。もちろん，実歪対称行列の性質 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ を利用します。

$$\det|\mathbf{A}| = \det|\mathbf{A}|^T \tag{2.9}$$

$$= \det|\mathbf{A}^T| \tag{2.10}$$

$$= \det|-\mathbf{A}| \quad (\because \mathbf{A}\text{ は歪対称行列}) \tag{2.11}$$

$$= (-1)^n \det|\mathbf{A}| \tag{2.12}$$

したがって，n が奇数のとき，$\det|\mathbf{A}| = -\det|\mathbf{A}|$ となり，$\det|\mathbf{A}| = 0$ となります。ゆえに，$\mathbf{A}$ は正則ではありません。

2.1.5　小問 (2-3)

この問題が今年度の線形代数のポイントです。昨年度と同じ手続きで解くことができます。任意の実歪対称行列 A の 1 つの固有値を λ とおきます。まず，固有値の定義から，

$$Ax = \lambda x \tag{2.13}$$

次に，両辺の共役転値をとります。なぜ共役転置をとるのかというと，共役転置を取ることで転置に関する条件を利用することができ，実歪対称行列の条件を利用できるからです。

$$-\boldsymbol{x}^* \mathbf{A} = \overline{\lambda} \boldsymbol{x}^* \tag{2.14}$$

ただし，$\overline{\lambda}$ は λ の共役を，$\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{x}$ の共役転置を表しています。これらの式を利用して，二次形式 $\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x}$ を変形していきます。なぜ二次形式 $\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x}$ に注目するのかというと，式 (2.13) と式 (2.14) が二次形式の一部を表しているからです。まず，式 (2.13) を利用して変形を行ってみましょう。

$$\begin{align} \boldsymbol{x}^* \mathbf{A} \boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} \tag{2.15} \\ &= \lambda \|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{2.16} \end{align}$$

ただし，$\|\boldsymbol{x}\|^2$ は $\boldsymbol{x}$ のノルムの二乗を表しています。次に，式 (2.14) を利用します。

$$\begin{align} \boldsymbol{x}^* \mathbf{A} \boldsymbol{x} &= -\overline{\lambda} \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x} \tag{2.17} \\ &= -\overline{\lambda} \|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{2.18} \end{align}$$

これらを見比べれば，以下が成り立ちます。

$$\lambda = -\overline{\lambda} \tag{2.19}$$

したがって，A の固有値は 0 または純虚数になります。

2.2　微分積分

例年通り，微積分では偏微分と（重）積分が問われました。特に，ガウス積分は頻出ですので，必ずおさえておくようにしましょう。

2.2.1　小問 (1-1)

ラグランジュの未定乗数法を利用する問題です。高校数学のように代入法を用いても簡単に解くことができますが，汎用性も考えてまずはラグランジュの未定乗数法を利用する解法を見ていきましょう。

ラグランジュの未定乗数法

束縛条件 $g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が最大値となる点 (a,b) を求める問題を考える。ラグランジュ乗数を λ とし，

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y) \tag{2.20}$$

とおく。点 (a,b) で $\partial g/\partial x$ と $\partial g/\partial y$ の少なくとも一方が 0 でないならば，α が存在して点 (a,b,α) で

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \tag{2.21}$$

が成り立つ。

注意点としては，ラグランジュの未定乗数法を利用して出てくる (x,y) は f の極値を与える候補でしかないという点です。したがって，ラグランジュの未定乗数法を利用する場合は，求められた (x,y) で f が極大値をとるか，極小値をとるか，そうでないかは吟味する必要があります。具体的には，g が有界閉集合であれば，定義域の端点を調べる必要がないため，f は最大値・最小値を持つことが保証されます。そうでない場合には，陰関数 g を $y=h(x)$ として $f(x,h(x))$ の 2 階微分を考えます。ただし，知能情報の院試ではそこまでの厳密さは求められていないため，式 (2.21) の連立方程式を解いてそれらの解を f に代入するだけで良いように思います。

早速解いていきます。束縛条件を $g(x,y)=x+y-3$，目的関数を $f(x,y)=x^2+y^2$ とおけば，ラグランジュ関数 $L(x,y,\lambda)$ は以下のように表されます。

$$\begin{aligned} L(x,y,\lambda) &= f(x,y)-\lambda g(x,y) && (2.22)\\ &= x^2+y^2-\lambda(x+y-3) && (2.23)\end{aligned}$$

それぞれの変数に対して偏微分すると，

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x-\lambda=0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda=0 \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-3=0 \tag{2.26}$$

式 (2.24)，式 (2.25) より，$x = y$ を得ます。これを式 (2.26) に代入すれば，

$$x = y = \frac{3}{2} \tag{2.27}$$

となります。これは $f(x, y)$ の極値を与える点の候補です。$(x, y) = (3/2, 3/2)$ を f に代入すれば，f の最小値が 9/2 であることが分かりました。ちなみに，$(x, y) = (3/2, 3/2)$ で f が最小値をとる証明は以下の通りです。陰関数 $g(x, y)$ を $h(x) = -x + 3$ とすれば，$f(x, h(x)) = 2x^2 - 6x + 9$ となります。$f''(x, h(x)) = 4 > 0$ であるため，f は極値で最小値をとります。ただし，この方法で最小値の存在を確認する過程で実は f を x の二次関数として表せていますので，平方完成してしまえば簡単に最小値を求めることができます。

2.2.2　小問 (1-2)

方針は前問と同じです。束縛条件を $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$，目的関数を $f(x, y) = xy + x$ とおけば，ラグランジュ関数 $L(x, y, \lambda)$ は以下のように表されます。

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \tag{2.28}$$

$$= xy + x - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \tag{2.29}$$

それぞれの変数に対して偏微分すると，

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 1 - \lambda x = 0 \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda y = 0 \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 + 1 = 0 \tag{2.32}$$

式 (2.30)，式 (2.31) より，$x \neq 0$ のとき $\lambda = -(y+1)/2x$ を得ます。これを式 (2.30) に代入すれば，

$$x^2 = y(y + 1) \tag{2.33}$$

を得ます。これを式 (2.32) に代入すれば，

$$(2y - 1)(y + 1) = 0 \tag{2.34}$$

となります。$x \neq 0$ に注意すれば，$f(x, y)$ の極値を与える点の候補は $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ であることが分かります。$x = 0$ のときは，式 (2.30)〜式 (2.32) を満たす (x, y) は存在しません。$(x, y) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ を f に代入すれば，f の最小値が $(2 + \sqrt{3})/4$ であることが分かりました。ちなみに，g が有界閉

集合であり（証明は省略します），f が必ず最大値と最小値を持つことが保証されるため，f は $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ で最小値をとることが示せます。ちなみに，この問題は束縛条件を極座標に置き換えることでも解くことができます。$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ と置くことで，θ の 1 変数最大最小問題に帰着させることができます。総括すると，今年の微積はラグランジュの未定乗数法を使わなくても，代入法と極座標変換で簡単に解くことができます。しかし，今後の汎用性を考えると，ラグランジュの未定乗数法を使えるようになっておいて損はしないでしょう。

2.2.3　小問 (2-1)

設問 2 では，一貫して「$x^n \times$ 指数関数」という形の積分が問われました。これは，一般的に証明すると綺麗に理解することができますので，本解説でも積分の一般系を考えることで問題を解いていこうと思います。まずは，指数関数が e^{-ax} のパターンです。以下を証明します。

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \tag{2.35}$$

これは高校数学の知識を利用することで証明することができます。いわゆる積分漸化式です。部分積分を利用すれば，以下の漸化式を得ることができます。

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx &(2.36)\\
&= \int_0^\infty x^n (-\frac{1}{a} e^{-ax})' dx &(2.37)\\
&= -\frac{1}{a}\left[x^n e^{-ax}\right]_0^\infty + \frac{n}{a}\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax} dx &(2.38)\\
&= \frac{n}{a} I_{n-1} &(2.39)
\end{aligned}$$

ここで，漸化式の初期値 I_0 を求めておきましょう。

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^\infty e^{-ax} dx &(2.40)\\
&= \left[-\frac{1}{a} e^{-ax}\right]_0^\infty &(2.41)\\
&= \frac{1}{a} &(2.42)
\end{aligned}$$

したがって，I_n は以下のように求められます。

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n}{a} I_{n-1} &(2.43)\\
&= \frac{n!}{a^n} I_0 &(2.44)
\end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{a^{n+1}} \tag{2.45}$$

本問題は，$(a, n) = (1, 1)$ の場合ですので，答えは以下のようになります。

$$I_1 = \frac{1!}{1^{(1+1)}} \tag{2.46}$$

$$= 1 \tag{2.47}$$

2.2.4 小問 (2-2)

次は，指数関数が e^{-ax^2} のパターンです。以下を証明します。

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}a^k}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & (n = 2k) \\ \frac{k!}{2a^{k+1}} & (n = 2k+1) \end{cases} \tag{2.48}$$

こちらの証明も，部分積分を用いた積分漸化式を利用します。I_n を以下のように設定します。

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx \tag{2.49}$$

これを部分積分します。

$$I_n = \int_0^\infty x^{(n-1)} \cdot x e^{-ax^2} dx \tag{2.50}$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_0^\infty x^{(n-1)} \left(-2axe^{-ax^2}\right) dx \tag{2.51}$$

$$= \left[-\frac{1}{2a}x^{(n-1)}e^{-ax^2}\right]_0^\infty - \left(-\frac{1}{2a}\right)\int_0^\infty (n-1)x^{(n-2)}e^{-ax^2} dx \tag{2.52}$$

$$= \frac{n-1}{2a}\int_0^\infty x^{(n-2)}e^{-ax^2} dx \tag{2.53}$$

$$= \frac{n-1}{2a} I_{n-2} \tag{2.54}$$

ここで，n が奇数と偶数で場合分けをします。

$$I_n = \begin{cases} \frac{2k-1}{2a} I_{2(k-1)} & (n = 2k) \\ \frac{k}{a} I_{2k-1} & (n = 2k+1) \end{cases} \tag{2.55}$$

ここで，漸化式の初期値 I_0，I_1 を求めておきましょう。I_0 はガウス積分を利用します。

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx \tag{2.56}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2.57}$$

$$\tag{2.58}$$

I_1 は単なる部分積分です。

$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax^2}dx \tag{2.59}$$
$$= -\frac{1}{2a}\left[e^{-ax^2}\right]_0^\infty \tag{2.60}$$
$$= \frac{1}{2a} \tag{2.61}$$

したがって，漸化式は以下のように解けます。まずは $n = 2k$ のときです。

$$I_n = \frac{2k-1}{2a}I_{2(k-1)} \tag{2.62}$$
$$= \frac{(2k-1)!!}{(2a)^k}I_0 \tag{2.63}$$
$$= \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}a^k}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2.64}$$

ただし，$(2k-1)!!$ は $2k-1$ から 1 までの奇数の積を表しています。続いて，$n = 2k+1$ のときです。

$$I_n = \frac{k}{a}I_{2k-1} \tag{2.65}$$
$$= \frac{k!}{a^k}I_1 \tag{2.66}$$
$$= \frac{k!}{a^k}\cdot\frac{1}{2a} \tag{2.67}$$
$$= \frac{k!}{2a^{k+1}} \tag{2.68}$$

これにて，式 (2.48) の証明が完了しました。さて，問題に戻りましょう。小問 (2-2) では $n = 3$ であり n は奇数です。そこで，$(k, a) = (1, 1)$ を式 (2.48) の下側に代入すれば，答えが求められます。

$$I_1 = \frac{1!}{2\cdot 1^{1+1}} \tag{2.69}$$
$$= \frac{1}{2} \tag{2.70}$$

2.2.5 小問 (2-2)

今回は $n = 15$ であり，またしても n は奇数です。そこで，$(k, a) = (7, 1)$ を式 (2.48) の下側に代入すれば，答えが求められます。

$$
\begin{aligned}
I_7 &= \frac{7!}{2 \cdot 1^{7+1}} && (2.71) \\
&= \frac{7!}{2} && (2.72)
\end{aligned}
$$

2.3 統計学

本年度は，ポアソン分布に関する性質，区間推定，統計用語の説明などが問われました。前半部分は確率分布の定義や計算方法が分かっていれば得点は容易な内容でした。しかし，ポアソン分布の分布形（もしくは導出方法）を知らなければ，まず解答は難しかったでしょう。区間推定についても，例年よく問われる内容です。また，昨年度より統計用語の概念を説明する問題がよく問われていますので，対策は必須でしょう。

2.3.1 小問 (1-1)

ポアソン分布の分布系は (b) です。念のため，ここではポアソン分布を導出しておきます。期待値と分散も小問 (1-3) で利用するため，ここで求めておくことにします。ポアソン分布は，二項分布において $\mu = np$ を一定に保ちながら $n \to \infty$ とすることで導かれます。実際に計算していきます。

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= {}_nC_x p^x (1-p)^{1-x} && (2.73) \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} && (2.74) \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} && (2.75) \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} && (2.76) \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \left\{ \left(1 + \frac{1}{-n/\lambda}\right)^{-n/\lambda} \right\}^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} && (2.77) \\
&\longrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (n \to \infty) && (2.78)
\end{aligned}
$$

さて，次に確率母関数を求めていきます。以下の e^λ のマクローリン展開を利用します。

$$e^\lambda = 1 + \frac{s\lambda}{1!} + \frac{(s\lambda)^2}{2!} + \cdots \tag{2.79}$$

実際に計算していきましょう。

$$\begin{aligned} G(s;\lambda) &= E[s^x] && (2.80)\\ &= \sum_{x=0}^{\infty} s^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} && (2.81)\\ &= e^{-\lambda}\left\{1 + \frac{s\lambda}{1!} + \frac{(s\lambda)^2}{2!} + \cdots\right\} && (2.82)\\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{s\lambda} && (2.83)\\ &= \exp\{\lambda(s-1)\} && (2.84) \end{aligned}$$

さて，この確率母関数を利用して期待値と分散を計算していきましょう。

$$\begin{aligned} E[X] &= \left.\frac{dG(s;\lambda)}{ds}\right|_{s=1} && (2.85)\\ &= \lambda \exp\{\lambda(s-1)\}\big|_{s=1} && (2.86)\\ &= \lambda && (2.87)\\ E[X(X-1)] &= \left.\frac{d^2G(s;\lambda)}{ds^2}\right|_{s=1} && (2.88)\\ &= \lambda^2 \exp\{\lambda(s-1)\}\big|_{s=1} && (2.89)\\ &= \lambda^2 && (2.90)\\ V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 && (2.91)\\ &= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2 && (2.92)\\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 && (2.93)\\ &= \lambda && (2.94) \end{aligned}$$

ポアソン分布は期待値と分散が同じ値をもちます。

2.3.2　小問 (1-2)

確率 $P(X \leq N)$ というのは，X を N から ∞ まで考えなくてはなりませんので，余事象を利用することで対象とする X を限定してしまいましょう。すなわち，以下のように $P(X \leq N) < 0.1$

という条件を変形します。N が整数であることに注意して $<$ を $\leq$ に変形します。

$$\begin{aligned} P(X \geq N) &= 1 - P(X < N) && (2.95) \\ &= 1 - P(X \leq N-1) && (2.96) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right\} < 0.1 && (2.97) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right\} > 0.9 && (2.98) \end{aligned}$$

この条件を満たす N を見つければ OK です。$e^{-2} = 0.135$ を考慮して，以下のような表を考えてあげます。

X	0	1	2	3
$f(x;\lambda=2)$	$\frac{e^{-2}}{0!}2^0$	$\frac{e^{-2}}{1!}2^1$	$\frac{e^{-2}}{2!}2^2$	$\frac{e^{-2}}{3!}2^3$
	0.135	0.270	0.270	1.8

以上より，$N = 3$ まで $f(x)$ を足してあげれば，式 (2.98) を満たすことが分かります。すなわち，問題の条件を満たす最小の N は 4 であることが分かりました。

2.3.3　小問 (1-3)

D 秒間の発生回数 S は，以下のように表されます。

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_D \tag{2.99}$$

なぜなら，D 秒間というのは「独立な 1 秒間の D 回分」と捉えることができるためです。平均 μ，分散 σ^2 の同一分布に従う D 個の確率変数の和の平均（標本平均）は，D が十分大きいときは平均 μ，分散 $\frac{\sigma^2}{D}$ の正規分布に従うことが知られています。この定理を中心極限定理と呼びます。

【中心極限定理：Central Limit Theorem】

任意の実数 x に対して

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq x \right) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (n \to \infty) \tag{2.100}$$

ただし，X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は同じ分布に従う独立な確率変数であり，$E[X_i] = \mu$, $V[X_i] = \sigma^2$ とおいた。

今回対象とするのは，平均 λ，分散 λ のポアソン分布に従う D 個の確率変数の和です。和の平均

（標本平均）の D 倍の値ですね。ちなみに，ポアソン分布の平均と分散が λ になることは，先ほど確認しましたね。中心極限定理より，D が十分大きいときには標本平均は平均 λ，分散 $\frac{\lambda}{D}$ の正規分布に従いますので，標本平均の D 倍である確率変数 S は，平均 $D\lambda = 2D$，分散 $D^2 \cdot \frac{\lambda}{D} = D\lambda = 2D$ の正規分布に従います。なお，確率変数の線形和に関する以下の定理を利用しました。

【確率変数の性質：Properties of Random Variable】

確率変数 X，$\mathbf{Y}$ と定数 a，b，c に対して，次が成り立つ。

1. $E[aX + b\mathbf{Y} + c] = aE[X] + bE[\mathbf{Y}] + c$
2. $V[aX + b\mathbf{Y} + c] = a^2V[X] + b^2V[\mathbf{Y}] + 2ab\mathrm{Cov}[X, \mathbf{Y}]$

2.3.4　小問 (2)

まずは解答を先にお伝えします。

標本平均を $\bar{Y} = (Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)/n$，不偏分散を S^2 とすると，$t = (\bar{Y}-\mu)/\sqrt{S^2/n}$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。自由度 n-1 の t 分布に従う確率変数 t において $P(-c \leq t \leq c) = 0.95$ が成り立つ c を求める。すると，95%信頼区間は $[\bar{Y} - c\sqrt{S^2/n}, \bar{Y} + c\sqrt{S^2/n}]$ と計算される。

さて，ここからは上記解答の説明をしていきたいと思います。母分散が既知の場合はその値を利用して 95%信頼区間を計算すればよいだけの話なのですが，普通は母分散など未知の場合がほとんどです。そこで，母分散の不偏推定量である不偏分散を利用して 95%信頼区間を求めていくという流れです。少し天下り的ですが，母分散が未知の場合の母平均の区間推定では t 分布を利用します。$t = Z/\sqrt{X/n}$ とおいたときに，$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ かつ $X \sim$ (自由度 $n-1$ の)χ^2分布 のときに，t は t 分布に従います。さて，まずは解答の中でおいた t の定義を変形してみましょう。

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu)}{S^2} \tag{2.101}$$

$$= \frac{(\bar{Y} - \mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} \tag{2.102}$$

$$= \frac{Z}{X/(n-1)} \tag{2.103}$$

このとき，Z は $\bar{Y}$ を標準化した変数ですので，$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ です。また，X に関して変形を施し

ていきます。

$$X = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \tag{2.104}$$
$$= \frac{n-1}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 \tag{2.105}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{\sigma}\right) \tag{2.106}$$

となります。ここで，自由度 n の χ^2 分布に従う確率変数 X は

$$X = \sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i - \mu}{\sigma} \tag{2.107}$$

です。今回は μ の代わりに $\bar{Y}$ を使っていますので，以下の条件が成り立ってしまい，

$$\frac{Y_1 - \bar{Y}}{\sigma} + \ldots + \frac{Y_n - \bar{Y}}{\sigma} = 0 \tag{2.108}$$

自由度が 1 減ります。したがって，式 (2.106) で表される X は自由度 n-1 の χ^2 分布に従います。以上から，t 自由度 n-1 の t 分布に従います。このことから，t 分布における 95%信頼区間を実現する c を求めてから，以下のような式変形を行います。

$$-c \leq \frac{\bar{Y} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \leq c \tag{2.109}$$
$$\bar{Y} - c\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + c\sqrt{\frac{S^2}{n}} \tag{2.110}$$

このような変形から，上記解答が導かれました。

2.3.5　小問 (3-1)

まずは解答を先にお伝えします。

> 2 つの確率変数が無相関であることは，独立であることの必要条件であるため，無相関であるからといって独立であるとは限らない点。

2 つの確率変数 X，Y を考えます。すると，以下が成り立ちます。

- 独立 $\rightarrow$ 無相関
- X と Y が 2 次元正規分布に従っている場合は無相関 $\rightarrow$ 独立

簡単な証明を行なっておきます。以下，確率変数は離散型としますが，シグマをインテグラルに対応させれば連続型確率変数に関しても同様に証明することができます。X と Y が独立のとき，以下が成り立ちます。

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xyP(X = x, Y = y) \tag{2.111}$$
$$= \sum_x \sum_y xyP(X = x)P(Y = y) \tag{2.112}$$
$$= \sum_x xP(X = x) \sum_y yP(Y = y) \tag{2.113}$$
$$= E[X]E[Y] \tag{2.114}$$

$E[X, Y] = E[X]E[Y] + \mathrm{Cov}[X, Y]$ ですので，$\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$ が成り立ちます。したがって，X と Y は無相関になります。ここで注意して欲しいのは「無相関 $\to$ 独立」は成り立たないということです。ただし，X と Y が二次元正規分布に従っている場合は「無相関 $\to$ 独立」が成り立ちます。以下，簡単な証明をお伝えしていきます。X と Y が無相関のとき，分散共分散行列の対角成分は 0 になるため，分散共分散行列の行列式は $|\Sigma| = \sigma_X^2 \sigma_Y^2$ になります。これを二次元正規分布の定義式に代入します。$X_1 = X$，$X_2 = Y$ とします。

$$\frac{1}{2\pi|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) \tag{2.115}$$
$$= \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \tag{2.116}$$

1 行目における exp の中身は，Σ が対角行列になっていることに注目すれば簡単に計算できます。さて，式 (2.116) は一次元正規分布の積の形になっていますので，同時確率が各変数の積で表されることが示されました。ゆえに，X と Y は独立になります。

2.3.6　小問 (3-2)

まずは解答を先にお伝えします。

> 帰無仮説が棄却されていない東京と帰無仮説が棄却された京都に「統計的な差がある」とはいえない点。東京と京都で実験条件と統制条件の有意差を別々に検定するのではなく，本来は東京と京都を実験条件に含めて有意差を検定するべきである。

東京で実験条件と統制条件の有意差が見られなかったからといって，帰無仮説が棄却されたことにはなりません（京都では帰無仮説は棄却されています）。ですので，帰無仮説が棄却されてい

ない東京と帰無仮説が棄却された京都に「統計的な差がある」とはいえません。本来，東京と京都の地域差を検定したいのであれば，東京と京都を実験条件に含めて検定を行うべきです。

2.3.7 小問 (4-1)

まずは解答を先にお伝えします。

> ボンフェローニ補正は多重比較問題，すなわち統計的検定を複数回実施したときに少なくとも一つ以上の検定結果が有意になる確率が増大してしまう問題を解決するための手法の一つである。本手法では，補正前の有意水準を検定回数で割ったものを補正後の有意水準として採用し，有意差を出にくくすることで多重比較問題を解決する。

多重比較問題（多重性の問題）は，統計的検定を複数回実施したときに，第１種の過誤（α エラー）が増大してしまう問題のことを指します。例えば，１回の検定であれば，有意水準 5%を設定したときに，結果が有意とならない確率は 95%です。一方，２回の検定のときは，有意水準 5%を設定したときに結果が有意とならない確率は $0.95 \times 0.95 \simeq 0.86 = 86\%$になります。このように，検定回数を上げていくと，結果が有意にならない確率が小さくなっていく（たまたま結果が有意になる確率が増えていく）ということです。他に多重比較問題を調整する方法としては，ダネット法やホルム法があります。

2.3.8 小問 (4-2)

まずは解答を先にお伝えします。

> 分散分析における η^2 は効果量と呼ばれており，実験的操作の効果や変数間の関係の強さを表す指標である。要因の操作による影響が強い場合，もしくは要因内のばらつき（誤差）からの影響が弱い場合に大きな値をとる。サンプルサイズには左右されず，測定単位の影響を受けないという利点がある。効果量を用いることで，別々の（単位の異なる）研究から得られた効果の比較が可能になる。なお，η^2 はピアソンの積率相関係数の二乗 r^2（分散説明率）に対応する。事前に設定した効果量に基づいて，適切なサンプルサイズを前もって調べておくこともある（事前分析）。

効果量は，グループの違いによって平均値の差に及ぼす影響の大きさを表します。一般に，統計的検定ではサンプルサイズが大きいほど有意差が出やすいとされています。そこで，サンプルサイズに左右される値とは別の影響力を調べたいというモチベーションが湧いてきます。そのた

めに定義された統計量が効果量になります。効果量は，差の大きさを表す d 族と関係の大きさを表す r 族に分けられ，η^2 は r 族の 1 つです。η^2 は以下のように定義されます。

$$\eta^2 = \frac{SS_A}{SS_T} \tag{2.117}$$

なお，SS_T は全てのデータの平方和を表し，SS_A は調べたい要因の平方和を表します。

2.3.9　小問 (4-3)

まずは解答を先にお伝えします。

> ブートストラップ法は，計算機を利用してデータのもつ情報を抽出するための手法の一つである。具体的には，ある標本から復元抽出を繰り返して大量の標本を生成し，それらの標本から得られた推定値から母集団の性質やモデルの推測の誤差などを分析する手法のことを指す。ブートストラップ法は解析的な手法と比べて実装や定式化が単純という利点がある。

リサンプリングを行なって母集団の分布を経験分布（標本から導かれる分布）で近似しようという手法がブートストラップ法で，モンテカルロ法の一種です。普通，計算機によるシミュレーションは乱数を元にして行うことが多いですが，ブートストラップ法では観測データを元にして行います。具体的には，得られた標本値を有限の母集団として設定することでリサンプリングを可能にします。ブートストラップ法は解析的な定式化を必要としないという利点があります。

2.3.10　小問 (4-4)

まずは解答を先にお伝えします。

> 検定の検出力は，帰無仮説を正しく棄却する確率のことを指す。対立仮説が正しい状況で帰無仮説を棄却しない確率，すなわち第二種の過誤を犯す確率を β と表すと，検定の検出力は $1-\beta$ と表される。検定力は，サンプルサイズや有意水準に左右される。Cohen は $\beta = 0.2$ を推奨しており，事前に設定した検定力に基づいて適切なサンプルサイズを前もって調べておくこともある（事前分析）。

統計的検定では，有意水準を設定して検定を行います。一般に，α と β はトレードオフの関係にあるとされています。なぜなら，有意水準を上げると β は小さくなりますが，α は大きくなってしまうからです。また，分布同士のキョリやばらつきによって第二種の過誤を犯す確率 α は変

化しませんが，β は変化します。このように β が変化する状況で，β に関する指標として定められたのが検定の検出力です。なお，統計的検定においてはサンプルサイズ，有意水準，効果量，検定力の４つが検定結果の良し悪しを決定する要素であるとされています。

第3章　データ構造とアルゴリズム

本年度のデータ構造とアルゴリズムでは，動的計画法の一種である編集距離の計算とクイックソートに関する出題がされました。編集距離は動的計画法を理解する上でコスパの良いアルゴリズムであり，しっかりとおさえておく必要があります。問われる内容も，DP テーブルの要素を答える問題がほとんどで，最後に最小コストを実現するパスを求める問題がありました。昨年はマージソートが問われましたが，今年は頻出のクイックソートが選ばれました。クイックソートは，データ構造とアルゴリズムが選択必須でなかった時代から良く問われる分野ですので，必ずおさえておく必要があります。編集距離（動的計画法）もクイックソートも，データ構造とアルゴリズムの分野の中では必須科目ともいえる内容ですので，難易度としては平易だと思われます。ここ数年ソートに関する出題がされていることから，各種ソートを一度は必ず手を動かして実装するようにすると良いと思います。

3.1　小問 (1-1)

まずは，編集距離についておさらいしておきましょう。編集距離は，動的計画法によって計算される距離の一種で，一般には「削除」「挿入」「置換」の 3 つのアクションの組み合わせによって定義されます。それぞれのアクションにはコストを定める必要があります。本問題では，a を削除する場合はコスト $|a|$，b を挿入する場合はコスト $|b|$，a を b に置換する場合はコスト $|a-b|$ と定義されています。これを図示すると以下のようになります。ϕ は空文字を表します。

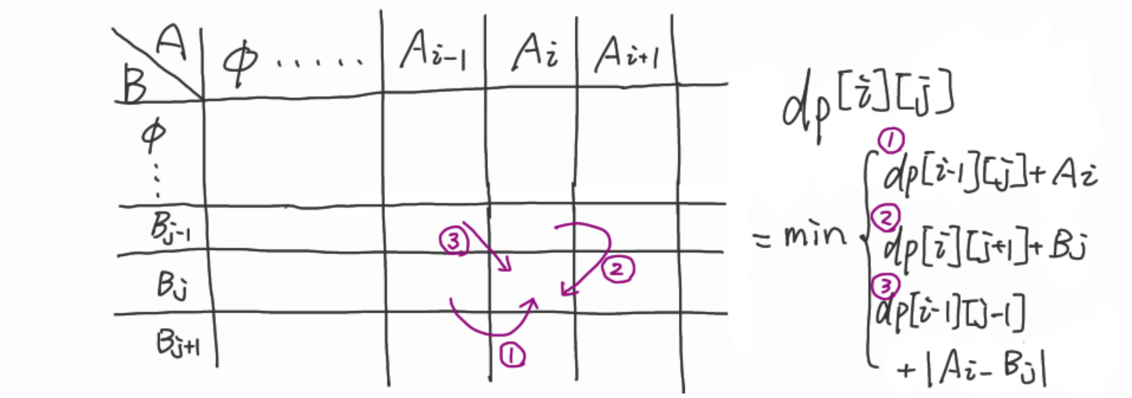

図 3.1: 編集距離の概要

編集距離は，3 つのステップで計算することができます。

編集距離の 3 ステップ

1. ϕ の行・列を埋める
2. 各行を左から埋めていく（列を上からでも OK）
3. 最小コストを実現するパスを逆から調べる

これらのステップに従う形で本問題で与えられた数列の編集距離を求めていきましょう。

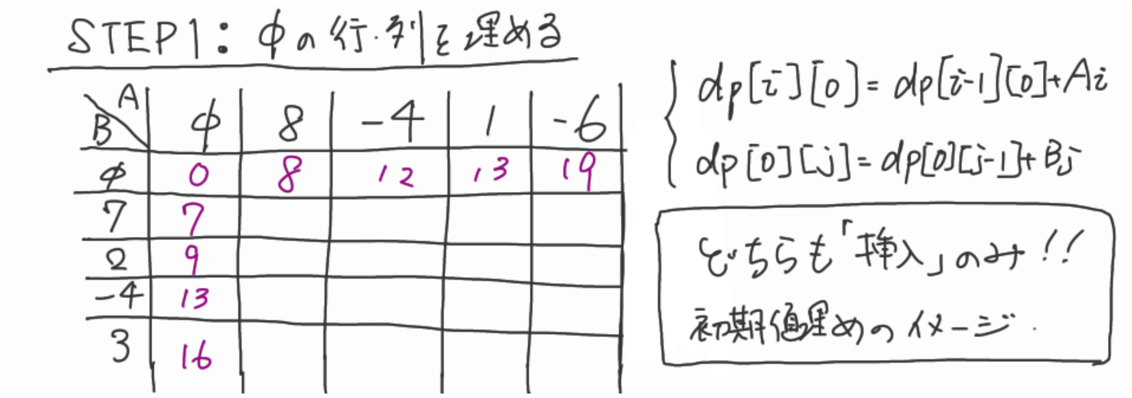

図 3.2: 編集距離の 3 ステップ（1 STEP 目）

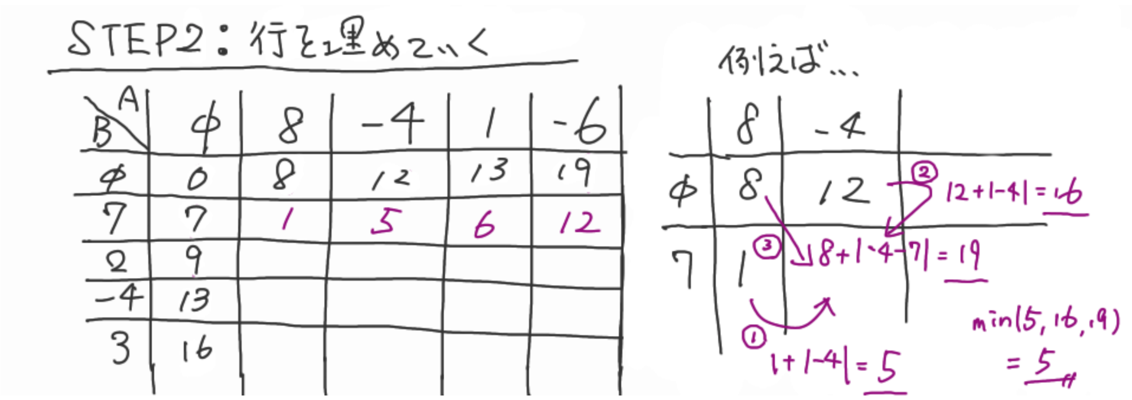

図 3.3: 編集距離の 3 ステップ（2 STEP 目）

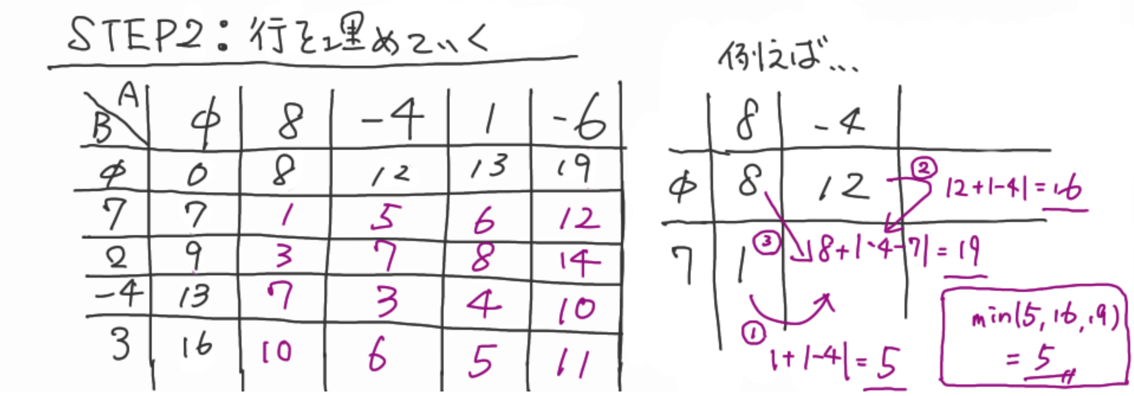

図 3.4: 編集距離の 3 ステップ（2 STEP 目の続き）

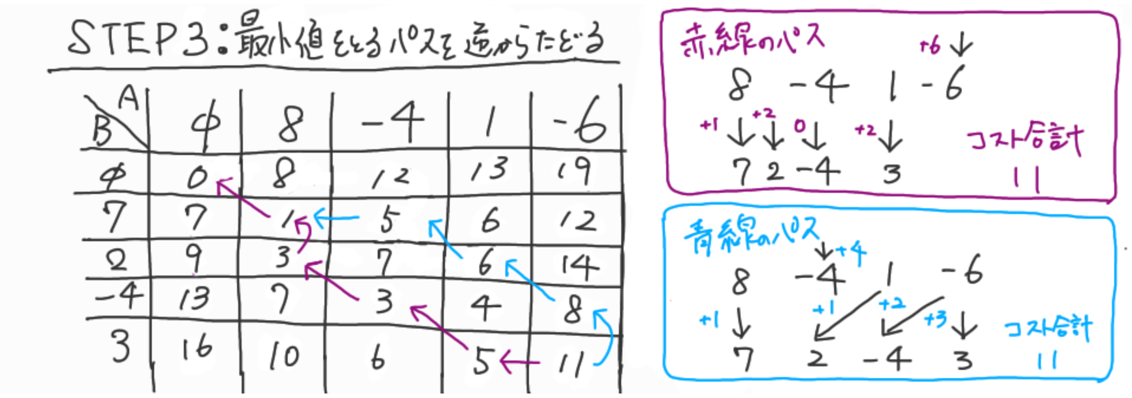

図 3.5: 編集距離の 3 ステップ（3 STEP 目）

実際に問題を解いていきましょう。小問 (1-1) では，M(1,1)，M(1,2)，M(1,3)，M(1,4) を求めます。これは，STEP 1 で行なった初期値埋めの操作に相当します。

$$\mathrm{M}(1,1) = 1, \quad \mathrm{M}(1,2) = 5, \quad \mathrm{M}(1,3) = 6, \quad \mathrm{M}(1,4) = 12 \tag{3.1}$$

3.2　小問 (1-2)

先ほどの DP テーブルを参照します。

$$\mathrm{M}(2,1) = 3, \quad \mathrm{M}(3,1) = 7, \quad \mathrm{M}(4,1) = 10 \tag{3.2}$$

3.3 小問 (1-3)

M(4,4) の表現は，図 3.1 の通りです。

$$\mathrm{M}(4,4) = \min \begin{cases} \mathrm{M}(3,3) + 9 \\ \mathrm{M}(3,4) + 3 \\ \mathrm{M}(4,3) + 6 \end{cases} \tag{3.3}$$

3.4 小問 (1-4)

先ほどの DP テーブルを参照します。

$$\mathrm{M}(4,4) = 11 \tag{3.4}$$

3.5 小問 (1-5)

本問題の答えは図 3.5 の右側に相当します。

3.6 小問 (2-1)

以下に解答例を示します。ポイントは「分割統治法」に触れた上で，軸を基準にした大小比較で要素を格納していくという手順を説明できていれば OK でしょう。

> クイックソートは分割統治法の一種である。ソートの対象配列を軸要素で分割し，その値より小さい要素は軸要素前の配列，大きい要素は軸要素後の配列に格納する操作を再帰的に行う。要素数が 1 以下の配列ができた場合はその領域を確定することで，ソートを実現する。（123 字）

3.7 小問 (2-2)

本文中のソースコードでは，x が軸要素（ピボット）を表しています。以下の部分

```
...
while (a[i] <= x) i++;
while (a[j] >= x) j--;
...
```

では,「a[i] > x」となるインデックス i と「a[j] < x」となるインデックス j をそれぞれ探しています。もう少し噛み砕けば，軸要素の値とその右側の領域に属する要素の値，左側の領域に属する要素の値を比べていき，それぞれの領域で軸要素より小さい値が見つかればそれらを入れ替えます。この比較は i と j が交差するまで行われます。ここで注目してほしいのは，軸要素の選び方によっては「a[i] > x」となるインデックス i と「a[j] < x」となるインデックス j が存在しない場合があるということです。具体的には，軸要素 x に最大値が割り当てられたときには,「a[i] > x」となるインデックス i は存在しません。ソースコード中で言えば全ての i について「a[i] ¡= x」が成立してしまうために，i の値が配列の要素数を超えてしまいます。同様に，軸要素 x に最小値が割り当てられたときには,「a[j] < x」となるインデックス j は存在しません。ソースコード中で言えば全ての j について「a[j] ¿= x」が成立してしまうために，j の値が配列の要素数を下回ってしまいます。以上の考察から，先ほどのソースコードを以下のように変更すれば,「a[i] > x」となるインデックス i と「a[j] < x」となるインデックス j の探索時に少なくとも i が最大値のインデックス，j が最小値のインデックスにさしかかったときに while ループから抜け出すことができるようになります。

```
...
while (a[i] < x) i++;
while (a[j] > x) j--;
...
```

最後に，本文で示されたクイックソートを用いて与えられた配列をソートする過程を考えます。軸要素は「a[(first + last) / 2]」で与えられます。明記されていませんが，first は配列の先頭インデックス，last は配列の末尾インデックスを表しているものと考えると，軸要素は a[(0+7)/2]=a[3]=8 となります。ちなみに，8 は配列の最大値ですので，先ほどの修正を加えないと while 文が無限ループしてしまいます。さて，軸要素を 8 としたときのクイックソートの過程を確認しましょう。

$$\{3,2,6,8,5,1,7,4\} \to \{3,2,6,4,5,1,7,8\} \quad (8 \leftrightarrow 4) \tag{3.5}$$

この交換で軸要素の左側に全て軸要素より小さい値が格納されましたので，1 回目の分割は終了です。このとき，軸要素の右側の領域はありません。左側の領域に対して，再びクイックソートの分割を適用します。軸要素は a[(0+6)/2]=a[3]=4 となります。したがって，2 回目左側の分割によるクイックソートの過程は以下のようになります。

$$\{3,2,6,4,5,1,7,8\} \to \{3,2,1,4,5,6,7,8\} \quad (6 \leftrightarrow 1) \tag{3.6}$$

さて，3 回目の分割では 4 の左側の領域と右側の領域が存在しますので，それぞれに対して再びクイックソートを適用します。しかし，よくよく見てみると，右側の領域はすでにソート済みですの

で，クイックソートを施しても変化はありません。そこで，左側の領域に対してクイックソートを施します。軸要素は a[(0+2)/2]=a[1] となります。したがって，3 回目左側の分割によるクイックソートの過程は以下のようになります。

$$\{3,2,1,4,5,6,7,8\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \quad (3 \leftrightarrow 1) \tag{3.7}$$

以上でクイックソートが完了しました。最後に，全ての遷移をまとめておきましょう。

$$\{3,2,6,8,5,1,7,4\} \rightarrow \{3,2,6,4,5,1,7,8\} \rightarrow \{3,2,1,4,5,6,7,8\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \tag{3.8}$$

3.8　小問 (2-3)

クイックソートは軸要素の選び方に依存して計算量の良し悪しが決まってしまいます。具体的には，前問で確認したように，軸要素に最大値（または最小値）が選ばれてしまった場合には，軸要素と右端（または左端）の要素を入れ替える操作を行うのみになってしまい，右側（または左側）の領域が潰されてしまいますので，分割統治法の良さを享受できません。今回は軸要素はインデックスの真ん中（要素数が偶数の場合はその左側）と決められています。そのため，最悪の場合の初期配列は，最初の配列の中央に最大値 8，その左側に最小値 1 をもってきます。そして，両側の領域がソート済みの配列を考えれば良いです。なぜなら，真ん中の軸要素と交換する配列は両側から走査されるため，クイックソートはあらかじめソートされた配列を逆順にするように要素を交換してしまうからです。

$$\{1,2,0,8,3,4,5,6,7\} \tag{3.9}$$

実際にクイックソートの過程を確認してみましょう。

$$\begin{aligned}
\{1,2,0,8,3,4,5,6,7\} &\rightarrow \{1,2,0,7,3,4,5,6,8\} \quad (8 \leftrightarrow 7) && (3.10)\\
&\rightarrow \{1,2,0,6,3,4,5,7,8\} \quad (7 \leftrightarrow 6) && (3.11)\\
&\rightarrow \{0,2,1,6,3,4,5,7,8\} \quad (1 \leftrightarrow 0) && (3.12)\\
&\rightarrow \{0,2,1,5,3,4,6,7,8\} \quad (6 \leftrightarrow 5) && (3.13)\\
&\rightarrow \{0,2,1,4,3,5,6,7,8\} \quad (5 \leftrightarrow 4) && (3.14)\\
&\rightarrow \{0,1,2,4,3,5,6,7,8\} \quad (2 \leftrightarrow 1) && (3.15)\\
&\rightarrow \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \quad (4 \leftrightarrow 3) && (3.16)
\end{aligned}$$

第4章　機械学習

本年度の問題は，線形回帰に関する基本的な計算問題が出題されました。例年の傾向通り，煩雑な計算処理が必要とされるのではなく，学習データセットを用いて未知の分布（出力）を予測（推論）するという機械学習の目的を，自分の手を使って簡単な例で再現できますか，ということを問われています。ポイントは，行っている操作や計算が機械学習における「学習」のプロセスなのか,「推論」のプロセスなのかを自覚しながら思考を進めていくことです。

4.1　小問 (1-1)

最小二乗法の学習に関する問題です。学習データセット $\mathcal{D}$ を用いてモデルの出力と実際のデータの学習誤差が最小になるようにパラメータ a と b を求めます。ここでは，a と b に関する偏微分を利用すれば OK です。

$$\frac{\partial \hat{J}(a,b)}{\partial a} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i \tag{4.1}$$

$$= -2(\overline{xy} - a\overline{x^2} - b\overline{x}) \tag{4.2}$$

$$= 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \hat{J}(a,b)}{\partial b} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) \tag{4.4}$$

$$= -2(\overline{y} - a\overline{x} - b) \tag{4.5}$$

$$= 0 \tag{4.6}$$

ただし，以下のように記号を置きました。

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.7}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{4.8}$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4.9}$$

恒等式 (4.6) を b について整理します。

$$b = \overline{y} - a\overline{x} \tag{4.10}$$

こいつを式 (4.3) に代入します。

$$\overline{xy} - a\overline{x^2} - (\overline{y} - a\overline{x})\overline{x} = 0 \tag{4.11}$$

最初に a が得られます。

$$\therefore a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{4.12}$$

$$= \frac{\sum_i x_i y_i - n(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{\sum_i x_i^2 - n(\sum_i x_i)^2} \tag{4.13}$$

なお，x と y の共分散を σ_{xy} とおくと，分母は以下のように表されます。

$$\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{y} \tag{4.14}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \tag{4.15}$$

$$= n\sigma_{xy} \tag{4.16}$$

同様に，x の分散を σ_x^2 とおくと，分子は以下のように表されます。

$$\sum_i x_i^2 - n(\sum_i x_i)^2 = n(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \tag{4.17}$$

$$= n\sigma_x^2 \tag{4.18}$$

以上より，a は以下のように表すことができます。

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \tag{4.19}$$

続いて，b を求めていきます。a を式 (4.10) に代入すれば解は求められるのですが，最小二乗法を用いた回帰係数の導出では b を求めてから式 (4.10) に代入するという操作を経ることが一般的なため，b の解は式 (4.10) で得られているとして OK です。

4.2　小問 (1-2)

直前の問題で導出した式に従って計算を進めれば OK です。具体的には，x の分散 σ_x^2 と x と y の共分散 σ_{xy}^2 を求めていきます。

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i)\right)^2 \tag{4.20}$$

$$= 2 \tag{4.21}$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})\sum_{i=1}^{5}(y_i - \overline{y})}{n} \tag{4.22}$$

$$= \frac{8}{5} \tag{4.23}$$

式 (4.19) に代入して $\hat{a}$ を求めます。

$$\hat{a} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \tag{4.24}$$

$$= \frac{4}{5} \tag{4.25}$$

式 (4.10) に代入して $\hat{b}$ を求めます。

$$\hat{b} = \overline{y} - a\overline{x} \tag{4.26}$$

$$= \frac{3}{5} \tag{4.27}$$

4.3　小問 (1-3)

本文中で与えられた以下の関数は，真の値とモデルの予測値の差分である汎化誤差を表しています。

$$J(a,b) = \int\int (y - f(x;a,b))^2 p(x,y)dxdy \tag{4.28}$$

本小問では，真の同時確率分布 $p(x,y)$ を異なる分布 $p'(x,y)$ で代替しようとする問題です。

$$J'(a,b) = \int\int (y - f(x;a,b))^2 p'(x,y)dxdy \tag{4.29}$$

その際の条件が $p(y|x) = p'(y|x)$ になります。事後確率が真の分布と等しくなるような分布を用意することは現実問題難しいのですが，本小問ではそのようなケースを考えています。ベイズの定

理を利用して，同時確率分布を分解していきます。

$$p'(x,y) = p'(y|x)p'(x) \tag{4.30}$$
$$= p(y|x)p'(x) \tag{4.31}$$
$$= \frac{p(x,y)}{p(x)}p'(x) \tag{4.32}$$
$$= \frac{p'(x)}{p(x)}p(x,y) \tag{4.33}$$

したがって，$J'(a,b)$ は以下のように表されます。

$$J'(a,b) = \int\int (y - f(x;a,b))^2 \cdot \frac{p'(x)}{p(x)}p(x,y)dxdy \tag{4.34}$$

問題文中の$\boxed{}$には $p'(x)/p(x)$ が入ります。

4.3.1 小問 (1-4)

問題文中の「J の学習データセット $\mathcal{D}$ による近似は $\hat{J}$ である」についての説明から始めます。機械学習では，入力 x から出力 y を予測するモデル f を評価する際に，データ (x,y) を生成する真の確率分布 $p(x,y)$ に対して，以下の期待値を目的関数 J とします。

$$J(l) = E[l(f(x),y)]_{\mathcal{D}} \tag{4.35}$$
$$= \int\int l(y,f(x))p(x,y)dxdy \tag{4.36}$$

ただし，l は誤差関数を表します。$J(l)$ は汎化誤差と呼ばれます。ここで，実際に得られたデータを (x_i,y_i) $(i=1,\ldots,n)$ とおくと，経験誤差 $\hat{J}(l)$ は以下のように定義されます。

$$\hat{J}(l) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l(y_i, f(x_i)) \tag{4.37}$$

経験誤差の定義は，汎化誤差において，データを生成する真の確率分布 $p(x,y)$ に一様分布 $1/n$ を仮定するというものです。汎化誤差が確率変数に連続値を仮定していたのに対し，経験誤差は実際のサンプルである観測値，つまり離散値を仮定することに注意すると，式 (4.36) において $p(x,y) = 1/n$ を代入すると，経験誤差はたしかに以下のように表されます。

$$E[l(f(x),y)]_{\hat{\mathcal{D}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l(y_i, f(x_i)) \tag{4.38}$$

ただし，観測値を支配するデータセットを $\hat{\mathcal{D}}$ としました。本問題では，誤差関数に二乗関数 $l(x) = x^2$ を用いているため，それに倣ってみます。

$$\hat{J}(l) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i; a, b))^2 \tag{4.39}$$

ただし，本問題の f は a と b をパラメータとしますので，$f(x; a, b)$ と書きました。さて，ここまで紹介した汎化誤差と経験誤差ですが，これらの一致性については，サンプルの独立性を仮定しない場合は「不偏推定量」，サンプルの独立性を仮定する場合は「対数の弱法則」を利用して議論することができます。

まずは，不偏推定量についてです。$\hat{J}(l)$ が不偏推定量であることを示すには，不偏推定量の定義に従って $E[\hat{J}(l)] = J(l)$ を示せば OK です。

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{D}}[\hat{J}(l)] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l(y_i, f(x_i))\right] && (4.40)\\
&= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} l(y_i, f(x_i))\right] && (4.41)\\
&= \frac{1}{n}\cdot nl(y_i, f(x_i)) && (4.42)\\
&= l(y_i, f(x_i)) && (4.43)\\
&= J(l) && (4.44)
\end{aligned}$$

たしかに，$\hat{J}(l)$ が不偏推定量であることを示せました。

続いて，対数の弱法則を利用した一致性の証明です。対数の弱法則は以下のような定理のことを指します。

【大数の弱法則：Weak Law of Large Numbers】

任意の正の実数 ϵ に対して

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \geq \epsilon\right|\right) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{4.45}$$

ただし，X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は同じ分布に従う独立な確率変数であり，$E[X_i] = \mu$ とおいた。

要するに，対数の弱法則は「サンプル数を多くしていくと標本平均が母平均に近づいていく」ことを示しています。これを先ほどまでの汎化誤差と経験誤差の議論に適用してみましょう。サンプルの独立性を仮定できる場合には，以下が成り立ちます。

$$P\left(\left|\hat{J}(l) - J(l) \geq \epsilon\right|\right) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{4.46}$$

ようやく冒頭に戻ります。問題文中の「J の学習データセット $\mathcal{D}$ による近似は $\hat{J}$ である」についての説明ですが，より厳密に言うと,「本問題ではサンプルに独立性が仮定できるため，サンプル数が十分に大きい場合に限り，汎化誤差を経験誤差で近似することができる」となります。さて，式 (4.36) を近似したときと同様に汎化誤差を経験誤差で近似したいと思います。この際，同時確率分布 $p(x,y)$ には一様分布が仮定されていますが，$p(x)$ や $p'(x)$ は未知であることに注意してください。

$$\hat{J}'(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i;a,b)) \cdot \frac{p(x_i)}{p'(x_i)} \tag{4.47}$$

4.3.2 小問 (1-5)

計算問題です。シグマ計算は平均の記号を用いると簡潔に表すことができます。小問 (1-1) 同様に偏微分を利用して計算を進めていきます。計算を簡単にするため，$p(x_i)/p'(x_i) = q_i$ と表します。

$$\frac{\partial \hat{J}(a,b)}{\partial a} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i q_i \tag{4.48}$$

$$= -2(\overline{xyq} - a\overline{x^2q} - b\overline{xq}) \tag{4.49}$$

$$= 0 \tag{4.50}$$

$$\frac{\partial \hat{J}(a,b)}{\partial b} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)q_i \tag{4.51}$$

$$= -2(\overline{yq} - a\overline{xq} - b\overline{q}) \tag{4.52}$$

$$= 0 \tag{4.53}$$

恒等式 (4.53) を b について整理します。

$$b = \frac{\overline{yq} - a\overline{xq}}{\overline{q}} \tag{4.54}$$

こいつを式 (4.50) に代入します。

$$\overline{xyq} - a\overline{x^2q} - \frac{\overline{yq} - a\overline{xq}}{\overline{q}}\overline{xq} = 0 \tag{4.55}$$

最初に $\hat{a}$ が得られます。

$$\therefore \hat{a} = \frac{\overline{xyq}\cdot\overline{q} - \overline{xq}\cdot\overline{yq}}{\overline{x^2q}\cdot\overline{q} - \overline{xq}^2} \tag{4.56}$$

$\hat{b}$ は式 (4.54) のように $\hat{a}$ を用いて表せば OK でしょう。

$$\hat{b} = \frac{\overline{yq} - \hat{a}\overline{xq}}{\overline{q}} \tag{4.57}$$

第5章　情報理論

本年度は，記憶のない定常情報源と簡単な符号化に関する問題が出題されました。難易度は比較的易しかったのではないかと思います。相互情報量はエントロピーを用いて定義されますが，より噛み砕いて確率を用いて計算できるようにしておくのが無難です。

5.1　小問 (1)

エントロピーの定義にしたがって計算するだけです。

$$
\begin{aligned}
H(A) &= \sum_{x \in A} p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)} && (5.1)\\
&= \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} && (5.2)\\
&= \frac{5}{2} - \frac{3}{8}\log_2 3 && (5.3)
\end{aligned}
$$

5.2　小問 (2)

符号が一意に復号可能かを判断する問題です。復号の一意性や瞬時性に関しては，幣サイトの記事 [1] をご覧ください。ここでは「瞬時符号であれば一意に復号可能」であることを利用します。また，瞬時符号である条件として「どの符号語も他の符号語の接頭になっていない」を利用します。

さて，符号 C_1 において，例えば a は b の接頭になってしまっています。ですので，符号 C_1 は瞬時符号ではありません。しかし，一意に復号可能ではあります。このことを示すためには，符号 C_1 を反転した符号 C_2 を定義すると分かりやすいです。符号 C_2 のいずれの符号語も他の符号語の接頭になっていないため，符号 C_2 は瞬時符号です。したがって，符号 C_2 は一意に復号可能です。

a	0
b	10
c	110
d	111

表 5.1: 符号 C_2 の構成

以上をまとめると，情報源 A から得られる記号を反転して符号 C_2 に基づいて符号化し，左右を反転したものが C_1 に基づいて符号化した記号になっています。実際に復号するときは，反転した記号に対して符号 C_2 に基づく復号を利用することで，一意に復号することができます。

5.3　小問 (3)

情報源 A は記憶の無い定常情報源ですので，十分に長い記号列における各アルファベットの生起確率は問題文で与えられている通りです。

$$p(a) = \frac{3}{8},\ p(b) = \frac{1}{4},\ p(c) = \frac{1}{4},\ p(d) = \frac{1}{8} \tag{5.4}$$

符号化した系列から 1bit 取り出したときに，それが 1 である確率は以下のように求めることができます。

$$p(a) \cdot \frac{0}{1} + p(b) \cdot \frac{1}{2} + p(c) \cdot \frac{2}{3} + p(d) \cdot \frac{3}{3} = \frac{5}{12} \tag{5.5}$$

5.4　小問 (4)

幣サイトの解説記事 [2] で示した通り，相互情報量 $I(X;Y)$ は以下のように求められます。

$$I(X;Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} \tag{5.6}$$

これを今回のケースに当てはめてみます。必要な確率をあらかじめ計算しておきます。

$$p(X=0) = \frac{7}{12} \tag{5.7}$$

$$p(X=1) = \frac{5}{12} \tag{5.8}$$

$$p(Y=0) = \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{9} = \frac{14}{27} \tag{5.9}$$

$$p(Y=1) = 1 - \frac{14}{27} = \frac{13}{27} \tag{5.10}$$

$$p(0,0) = \frac{14}{27} \tag{5.11}$$

$$p(0,1) = \frac{7}{108} \tag{5.12}$$

$$p(1,0) = 0 \tag{5.13}$$

$$p(1,1) = \frac{5}{12} \tag{5.14}$$

$$\tag{5.15}$$

これらの計算結果を利用すれば，相互情報量は以下のように求められます。

$$I(X;Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} \tag{5.16}$$

$$= \frac{14}{27} \log \frac{14/27}{7/12 \cdot 14/27} + 0 + \frac{7}{108} \log \frac{7/108}{7/12 \cdot 13/27} + \frac{5}{12} \log \frac{5/12}{5/12 \cdot 13/27} \tag{5.17}$$

$$= \frac{28}{27} \log 2 + \frac{33}{18} \log 3 + \frac{14}{27} \log 7 + \frac{13}{27} \log 13 \tag{5.18}$$

5.5 小問 (5)

小問 (4) と同様のサービス問題です。

$$p(A=0) = \frac{5}{8} \tag{5.19}$$

$$p(A=1) = \frac{3}{8} \tag{5.20}$$

$$p(B=0) = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{5}{9} \tag{5.21}$$

$$p(B=1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \tag{5.22}$$

$$p(0,0) = \frac{5}{9} \tag{5.23}$$

$$p(0,1) = \frac{5}{72} \tag{5.24}$$

$$p(1,0) = 0 \tag{5.25}$$

$$p(1,1) = \frac{3}{8} \tag{5.26}$$

$$\tag{5.27}$$

これらの計算結果を利用すれば，相互情報量は以下のように求められます。

$$I(A;B) = \sum_{a \in A, b \in B} P(a,b) \log \frac{P(a,b)}{P(a)P(b)} \tag{5.28}$$

$$= \frac{5}{9} \log \frac{5/9}{5/8 \cdot 5/9} + 0 + \frac{5}{72} \log \frac{5/72}{5/8 \cdot 4/9} + \frac{3}{8} \log \frac{3/8}{3/8 \cdot 4/9} \tag{5.29}$$

$$= \frac{7}{9} \log 2 + \frac{3}{4} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \tag{5.30}$$

5.6 小問 (5)

問題文で提示されている 2 元通信路は，入力が 1 の場合は誤りがないため，入力は 1 が多ければ多いほど望ましいということになります。符号 C_1 と C_2 を比較したとき，$p(X=1) > p(A=1)$ となるため，符号 C_2 よりも符号 C_1 の方が誤りを少なくするという観点で適していると考えられ

ます。つまり，符号 C_2 は最適でないと考えられます。なお，相互通信量 $I(X;Y)$ と $I(A;B)$ を比較して $I(X;Y) > I(A;B)$ を示しても良いのですが，対数の値が具体的に与えられていないため，そこまでの比較は求められていないものと解釈できます。

第6章　信号処理

本年度は離散コサイン変換に関する問題が出題されました。問 1 は連続な偶関数のフーリエスペクトルを求める問題ですが，これは離散コサイン変換への布石になっています。離散コサイン変換は対称の関数を左右対称に拡張して離散フーリエ変換を施すことと等価であるため，離散コサイン変換でも偶関数の考え方を利用します。また，離散コサイン変換に関する性質の記述問題も最後に出題されました。10 年ほど前までは音声・画像圧縮に関する問題が頻出していたことは懐かしいですが，最近では信号処理に関する計算以外の出題は珍しいです。他の分野を見ても，今後も記述問題の流れが継続すると考えられるため，単なる式変形だけでなく定性的な理解の裏付けを普段の勉強から意識する必要があります。

6.1　設問 1

定義に沿って計算するだけです。

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt && (6.1)\\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt && (6.2)\\
&= \int_{0}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega (-t)} dt + \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt && (6.3)\\
&= \int_{0}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt && (\because f(t) \text{ は偶関数}) \quad (6.4)\\
&= \int_{0}^{\infty} f(t) \left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right) dt && (6.5)\\
&= 2 \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt && (\because \text{オイラーの定理}) \quad (6.6)
\end{aligned}
$$

この問題で大切なのは，偶関数をフーリエ変換すると sin 成分が消えて cos 成分だけになるということです。離散コサイン変換でも，この考え方を利用します。

6.2　設問 2

合否が分かれる問題です。離散コサイン変換のシフトに関する性質の証明です。自然対数を底とする複素指数関数をフーリエ変換の結果にかけ合わせせることでシフト演算を表現することができます。ここで「循環」と呼んでいるのは，信号 $x[n]$ が $n = N-1$ までしか定義されていないからで，循環とは「信号 $x[n]$ のうち原点はどのサンプルから始まるのか」を指します。

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x_s[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} && (6.7)\\
&= \sum_{n=0}^{s-1} x[N+n-s] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=s}^{N-1} x[n-s] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} && (6.8)\\
&= \sum_{n=0}^{s-1} x[N+n-s] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N+n-s)} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(s-N)} + \sum_{n=s}^{N-1} x[n-s] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-s)} e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} && (6.9)\\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} x[N+n-s] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N+n-s)} + \sum_{n=s}^{N-1} x[n-s] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-s)} \right\} && (6.10)\\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} \left\{ \sum_{m=N-s}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} + \sum_{m=0}^{N-s} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right\} && (6.11)\\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} && (6.12)\\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}ks} X[k] && (6.13)
\end{aligned}
$$

式 (6.9) から式 (6.10) の式変形は，複素指数関数 $f(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ の周期が N であることから，$f(n) = f(n-N)$ を利用しました。

6.3　設問 3

こちらの問題も設問 2 と基本的には変わりません。，複素指数関数 $f(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ の周期が N であることから，$f(n) = f(n-N)$ を利用できるかがポイントです。

$$
\begin{aligned}
Y[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} && (6.14)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[2N-1-n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn} && (6.15)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn} && (6.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{\pi}{N}k(N-1-m)} && (6.17)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{j\frac{\pi}{N}k(m+1)} && (6.18)\\
&= e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\pi k\frac{2n+1}{2N}} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{j\pi k\frac{2n+1}{2N}} \right) && (6.19)\\
&= 2e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{e^{-j\pi k\frac{2n+1}{2N}} + e^{j\pi k\frac{2n+1}{2N}}}{2} \right) && (6.20)\\
&= 2e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\frac{\pi k}{2N}(2n+1) \right\} && (6.21)
\end{aligned}
$$

6.4 設問 4

離散フーリエ変換では，非周期関数を周期化するため圧縮前のデータを並べて変換処理を施すが，結合部分が非連続になり，結果として変換後に高周波数成分が出現してしまう。一方で，離散コサイン変換では，圧縮前のデータを並べる際に鏡像変換を用いるため，非連続部分が出現せず，離散コサイン変換と比べて低周波数領域に情報が集中し，エントロピーを減少させることができる。人間の視覚・聴覚は高周波領域の変化に鈍感であるため，離散フーリエ変換よりも相対的に低周波数成分に情報が集中する離散コサイン変換において，高周波数成分を切り捨てて逆離散コサイン変換を用いることで，視界・聴覚にとって劣化の少ないデータ圧縮が可能になる。

関連図書

[1] 一意復号可能な符号と瞬時符号. https://academ-aid.com/uniquely-decodable-code_instantaneous-code.

[2] 相互情報量の求め方. https://academ-aid.com/mutual-information.

第 7 章　おわりに

改めて，本資料を活用いただき誠にありがとうございます。もしかすると「大学院の過去問は自分でもがき苦しみながら解いてナンボや」という批評もあるかと思います。しかし，他人の解答があることで初めて理解できる考え方もあるはずです。何より，過去問の解答解説は院試に対する精神安定剤の役割を果たしてくれるのではないかと考えています。私自身，外部から知能情報を受けた身として，周りに助けを求められる人が少ない状況の中で院試に立ち向かう辛さは痛いほど味わったつもりです。この辛さを皆さんには味わって欲しくない，そんな一心で本資料をまとめました。

誤植や解答の誤り等は，お問い合わせページ（https://academ-aid.com/contact-us）よりご連絡いただければ幸いです。また，訂正履歴ページ https://academ-aid.com/revision-history）において，本資料の訂正箇所を公開しております。他にも，資料としてまとめて欲しい内容や，分かりにく箇所等もアドバイスいただければ嬉しく思います。大学生活や研究，大学院入試に関するご相談も受け付けておりますので，ぜひお気軽に連絡してくださいね。

京都大学情報学研究科 知能情報学専攻過去問解答解説 2019 年度

発行日　令和 3 年 9 月 19 日 第一版

発行元　https://academ-aid.com